

Identification du profil vibratoire d'un haut-parleur monté sur une enceinte close à partir de mesures de pression acoustique en champ proche

M. Sanlatii^{a,b,c}, P. Herzog^a, M. Melon^b, R. Guillermin^a, J.C. Le Roux^c et
N. Poulain^c

^aLMA - CNRS, 4 impasse Nikola Tesla CS 40006, 13453 Marseille Cedex 13, France

^bLAUM - Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9,
France

^cCTTM, 20 rue Thalès de Milet, 72000 Le Mans, France
sanlatii@lma.cnrs-mrs.fr

La localisation et la reconstruction de sources sonores (problème acoustique inverse) est une problématique commune à de nombreuses applications industrielles. Dans le cadre de mesures in situ, il est préférable d'utiliser des méthodes légères, adaptées à des formes de sources complexes, utilisant un nombre de capteurs aussi faible que possible et à des positions arbitraires proches de l'objet à mesurer. Une étude récente simulant un tel problème inverse (la reconstruction de la pression rayonnée par un transformateur en champ lointain à partir de mesures en champ proche) a montré que l'utilisation d'une décomposition du champ acoustique en "modes de rayonnement" peut être une méthode prometteuse. Cette approche consiste à mesurer la pression à des positions arbitraires et à utiliser ces mesures pour estimer les coefficients d'une série de solutions indépendantes ("modes de rayonnement") qui décrivent le rayonnement en champ lointain d'une déformée quelconque avec une précision connue, en utilisant un nombre de termes minimal.

Cette méthode est utilisée ici pour identifier le rayonnement d'un haut-parleur monté sur une enceinte close à partir de mesures de pression acoustique effectuées en chambre anéchoïque en un nombre restreint de points. Le calcul du champ rayonné à partir de la décomposition identifiée est ensuite comparé aux mesures, aux points ayant servi à l'identification et en d'autres points. Les résultats obtenus par la méthode des "modes de rayonnement" sont également confrontés à ceux obtenus par une méthode d'imagerie ayant fait ses preuves : l'holographie en champ proche (NAH).

1 Introduction

L'identification de sources acoustiques est un problème essentiel pour de nombreuses applications industrielles. Un besoin particulièrement fréquent est le diagnostic d'une machine trop bruyante, pour identifier les sources ou des trajets acoustiques majeurs, en vue de leur traitement : l'objectif est alors de retrouver l'origine du rayonnement sur la surface d'un objet ou sur une surface enveloppe.

Nous traitons ici d'un autre type de besoin, qui consiste à déterminer le rayonnement d'un dispositif à partir d'un petit nombre de mesures *in situ*, ou dans un environnement contraint ne permettant pas de choisir librement les positions de mesures. Notre objectif est alors d'utiliser le plus petit nombre de capteurs possible, en les plaçant arbitrairement à proximité de l'objet à mesurer.

Le problème d'identification et de reconstruction de sources a été largement étudié dans la littérature, et une revue assez exhaustive en a été publiée en 2008 par S.F. Wu [1]. Parmi les nombreuses solutions proposées, les plus répandues sont les techniques basées sur l'holographie en champ proche (NAH) [2]. Dans leur approche la plus classique, ces techniques consistent à utiliser une transformée de Fourier pour obtenir les coefficients d'un développement du champ rayonné sur une base de solutions de l'opérateur de propagation (ondes planes, cylindriques ou sphériques).

Pour pouvoir traiter le cas de géométries complexes, une approche alternative (IBEM-NAH) consistant à utiliser une méthode d'éléments de frontières (BEM), a été proposée d'abord sous forme d'un problème inverse classique [3], puis via une SVD tronquée destinée à régulariser l'inversion [4]. Des améliorations ont été apportées depuis [5, 6], et des variantes hybrides telles que la méthode HELS ont notamment cherché à réduire le nombre de coefficients à identifier [7].

La plupart des méthodes pré-citées visaient plutôt à retrouver l'origine du rayonnement, le problème inverse traité s'approchant alors d'une rétro-propagation. Cependant l'identification du champ propagé en champ lointain a également été traitée très tôt [8], même si la littérature spécifique à ce sujet est moins abondante.

La principale différence entre les deux problèmes provient de la simplification du champ rayonné lorsque l'on

s'éloigne de sa source, qui permet d'utiliser moins de termes dès que les mesures et la reconstruction du champ sont faites à une distance suffisante [9].

Une étude récente [10] a alors montré par des simulations qu'une méthode utilisant la série des "modes de rayonnement en champ lointain" d'une source, calculés par BEM et SVD, peut être une technique prometteuse pour réduire au minimum le nombre de termes à identifier et donc le volume de mesures nécessaires.

Une brève description des deux méthodes du calcul utilisées dans ce travail est présentée au §2. L'exemple étudié est décrit par le §3. Le §4 propose les résultats de simulation pour les deux méthodes. Les résultats de mesure comparés au calcul par la méthode des "modes de rayonnement" sont présentés dans le §5.

2 Méthodes utilisées

Cette partie présente une très brève description des deux méthodes de reconstruction du champ qui ont été utilisées dans ce travail : l'holographie en champ proche (NAH) et la méthode des "modes de rayonnement".

2.1 Holographie de champ proche

L'holographie de champ proche est une méthode d'imagerie qui permet de propager le champ rayonné par une source sonore ou d'identifier cette source par rétro-propagation. Nous en décrivons ici un exemple classique : l'holographie plane, où le calcul s'effectue à partir d'une grandeur acoustique (pression ou vitesse) mesurée sur un maillage plan régulier disposé à proximité de l'objet rayonnant. La NAH repose sur l'utilisation de transformées de Fourier spatiales et temporelles qui permettent d'obtenir un spectre en nombre d'ondes par bande de fréquences. Les spectres obtenus sont ensuite (rétro-)propagés, puis les signaux de pression en espace sont calculés par transformées de Fourier inverses.

Formulation

En calculant les transformées de Fourier spatiales et temporelles du champ de pression, la propagation dans le

domaine des nombres d'ondes est définie par l'expression suivante :

$$\hat{p}(k_x, k_y, z_s) = \hat{p}(k_x, k_y, z_h)G_p(k_z, z_s - z_h) \quad (1)$$

où $\hat{p}(k_x, k_y, z_h)$ et $\hat{p}(k_x, k_y, z_s)$ représentent les spectres des pressions acoustiques mesurées en z_h et extrapolées en z_s , k_x et k_y sont les nombres d'onde suivant les axes x et y respectivement, et $G_p(k_z, z_s - z_h) = e^{-jk_z(z_s - z_h)}$ est un propagateur pour la reconstruction de la pression acoustique (propagation), décrivant le décalage de phase (pour les composantes propagatives) entre deux plan parallèles au plan de mesure; $k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$ est le nombre d'onde dans la direction de propagation d'onde, où $k = \omega/c$ et c est la vitesse du son. Lorsque le nombre d'onde k_z est imaginaire pur, le (retro)-propagateur crée une (amplification)atténuation des ondes évanescentes.

L'éq. (1) montre que le spectre en nombre d'ondes dans un plan parallèle au plan de l'hologramme peut être obtenu en multipliant le spectre dans le plan d'hologramme par le propagateur G_p .

La pression acoustique en fonction de x et y peut enfin être obtenue en prenant la transformée de Fourier spatiale inverse de $\hat{p}(k_x, k_y, z_s)$:

$$p(x, y, z_s) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{p}(k_x, k_y, z_h)G_p(k_x, k_y, z_s - z_h)\} \quad (2)$$

L'utilisation de transformées de Fourier spatiales conduit à effectuer les mesures selon une grille régulière, qui doit être d'autant plus dense et proche que l'on souhaite obtenir une bonne résolution sur la surface de l'objet ou des résultats pertinents à haute fréquence (respect du critère de Nyquist).

2.2 Méthode “des modes de rayonnement”

La méthode des “modes du rayonnement” est inspirée par la technique IBEM-NAH régularisée par SVD, initialement proposée par Veronesi et Maynard [4]. Cette technique utilise une décomposition en valeur singulières (SVD) de matrices de transfert, afin de pouvoir être utilisée à des distances arbitraires de la source. La troncature de la SVD permet alors de filtrer les composantes évanescentes d'ordre élevé, régularisant implicitement l'inversion.

Dans l'approche utilisée ici, nous posons en préalable que les mesures de pression et la reconstruction du champ sont effectuées en champ lointain, donc à des distances où seuls les termes propagatifs de la décomposition ont une amplitude significative. En pratique cette distance est assez faible comparativement aux dimensions de la source [9], et la mesure est donc effectuée à proximité immédiate de l'objet - à des positions arbitraires.

Pour limiter le développement aux termes décrivant le champ lointain, nous partons de la matrice impédance \mathbf{Z} calculée sur la surface de l'objet. La décomposition SVD de la seule partie réelle de cette impédance permet d'obtenir la trace sur cette surface d'une série orthogonale décrivant uniquement le rayonnement en champ lointain, sans prendre en compte le champ évanescent dont la complexité serait bien plus grande. Chaque terme ainsi calculé correspond à une situation de rayonnement indépendante, qui peut être propagée en tout point de l'espace. La superposition de ces “modes de rayonnement” (ici considérés comme la propagation des termes de la décomposition de $\Re(\mathbf{Z})$) permet

ainsi de décrire n'importe quelle situation de rayonnement en champ lointain, avec la précision du modèle BEM utilisé. La troncature de cette série permet de réduire le nombre de coefficients à identifier, la précision de reconstruction étant réduite en conséquence.

Formulation

La pression $p(\vec{x})$ rayonnée par un objet vibrant de la surface S dans l'espace \mathcal{R}^3 , en un point quelconque à l'extérieur de cet objet $\vec{x} \in \mathcal{R}^3$, peut être exprimée par une formulation intégrale :

$$p(\vec{x}) = \int_S \left(\frac{\partial G}{\partial n}(\vec{x}) p_s - G(\vec{x}) \frac{\partial p_s}{\partial n} \right) dS, \forall \vec{x} \in \mathcal{R}^3 \quad (3)$$

En supposant que la solution harmonique dépend du temps en $e^{-j\omega t}$, la fonction de Green dans l'espace est donc $G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$; p_s définit la pression sur la surface de l'objet; ∂n signifie la dérivée par rapport à la normale.

Ce problème peut être résolu numériquement et réduit sous forme matricielle en discrétisant la surface S de l'objet étudié avec une densité suffisante, et en prenant l'hypothèse que la pression et la vitesse sont uniformes sur chaque élément du maillage.

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}_s = \mathbf{M} \mathbf{q}_s - \mathbf{D} \mathbf{p}_s \quad (4)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ est lié à l'angle solide vu par l'élément, ici considéré comme régulier.

La définition de la matrice impédance \mathbf{Z} en découle donc :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{p}_s \mathbf{q}_s^{-1} = \left[\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{D} \right]^{-1} \mathbf{M} \quad (5)$$

\mathbf{I} étant la matrice identité.

La partie imaginaire de la matrice \mathbf{Z} représente la trace du champ évanescent sur S . Pour la reconstruction de la pression en champ lointain, ces composantes ne sont pas utiles, car elles compliquent le calcul et ne changent pas le résultat. Ainsi, seule la partie réelle de la matrice d'impédance est décomposée en “modes de rayonnement”, via une décomposition en valeurs singulières (SVD) :

$$\Re(\mathbf{Z}) = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad (6)$$

où \mathbf{V} et \mathbf{U} sont respectivement les vecteurs des débits et des pressions pour chaque élément, $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale composée de valeurs réelles positives qui représentent l'efficacité de chacun des “modes”. Il est donc possible de tronquer la série de ces “modes” afin de garder les N composantes les plus efficaces, pour obtenir une décomposition avec la précision désirée.

La pseudo-inversion de la sous-matrice de transfert \mathbf{H}_i entre les “modes” et les positions d'identifications autour de l'objet permet de déterminer les coefficients d_i associés à chaque terme de cette décomposition :

$$d_i = \frac{\mathbf{H}_i^*}{\|\mathbf{H}_i\|^2} p_i \quad (7)$$

où p_i sont les pressions aux points d'identifications.

La pression p_c en champ lointain peut alors être calculée comme la superposition de l'ensemble des “modes”,

tronquée à ses N composantes les plus efficaces, et pondérée par les coefficients d_{iN} :

$$p_c = \mathbf{H}_c d_{iN} \quad (8)$$

où \mathbf{H}_c est la matrice de propagation des “modes” vers les positions cibles.

Une description plus détaillée de cette approche est présentée dans la réf. [10].

3 Description de l'exemple étudié

La source sonore étudiée dans ce travail est un haut-parleur Visaton FRS 8 Ω monté sur une enceinte close de dimensions $20 \times 35 \times 15$ cm (voir figure 1).

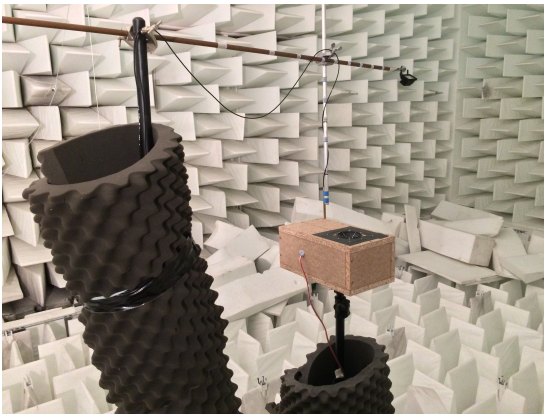


FIGURE 1 – Mesure de la pression rayonnée par le haut-parleur Visaton FRS 8 Ω monté sur une enceinte close

Le maillage du problème ainsi que les points de calcul sont présentés sur la figure 2.

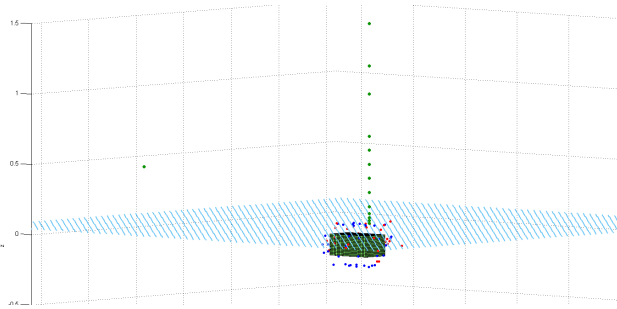


FIGURE 2 – Maillage de l'enceinte étudiée et points d'intérêt

Les points rouges et bleus sont deux ensembles de points d'identification à proximité de l'enceinte, qui sont utilisés pour identifier les coefficients associés aux “modes du rayonnement”. Le plan composé des points bleu clair représente le plan de l'hologramme simulé, à une distance de 7 cm de la face avant de l'enceinte et possède un pas inter-microphones de 6 cm. Les points verts à plus grande distance de l'enceinte sont les points cibles où le champ doit être reconstruit.

4 Simulation

Dans cette partie sont présentés et comparés les résultats de simulation par les deux méthodes décrites ci-dessus.

La NAH est calculée à partir d'un hologramme de 64×64 points, soit 4096 points en tout (points bleu clair de la fig. 2). Comme nous nous intéressons à un problème de propagation, aucune régularisation n'est nécessaire dans le cadre de la NAH.

Les coefficients des “modes de rayonnement” sont initialement déterminés à partir de 46 points d'identification (points bleus de la fig. 2) qui sont situés à environ 7 cm de l'enceinte et répartis arbitrairement autour d'elle afin d'obtenir une répartition “homogène” mais non symétrique. La série est tronquée à 15 termes dans cet exemple, d'après des essais préliminaires qui ont montré qu'un nombre supérieur ne modifie pas significativement les résultats.

Deux points dans l'espace sont choisis pour observer le résultat des deux reconstructions : $A(0.03; -0.015; 0.50)$ et $B(-1.23; 1.00; 0.50)$. L'origine du repère est au centre du haut-parleur (HP) avec la normale selon l'axe Oz (orientée vers l'extérieur). Le point A est donc à peu près sur l'axe du HP, alors que le point B est largement décalé de cet axe (à ~ 1.5 m).

Les résultats des calculs sont présentés par les figures 3 et 4, pour les points A et B respectivement. La courbe bleue correspond à la pression cible simulée avec le calcul BEM à partir d'une vitesse approximative du HP, la courbe verte correspond au calcul des “modes de rayonnement” avec un maillage respectant la géométrie réelle de l'enceinte et de la la membrane du HP, et la courbe violette est le résultat propagé par la NAH. La courbe rouge est un résultat obtenu par des “modes de rayonnement” calculés en considérant un maillage simplifié : la géométrie de la membrane du HP y est réduite à un disque plan.

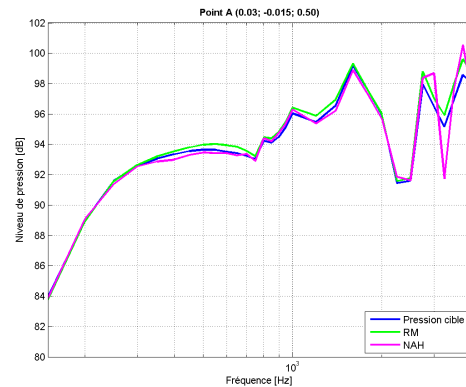


FIGURE 3 – Calcul et reconstruction de la pression au point A

Pour le point A à proximité de l'axe du HP (figure 3), les deux méthodes permettent d'obtenir une bonne précision de reconstruction (écarts inférieurs à 1 dB jusqu'à plus de 2 kHz). Par contre pour le point B éloigné de l'axe (figure 4), le résultat obtenu par NAH est un peu moins performant que celui obtenu via par les “modes de rayonnement”. Ce résultat n'invalide pas la NAH pour autant : la technique utilisée ici n'est pas optimale pour la géométrie de l'enceinte, même si le plan d'hologramme est bien situé par rapport à une des faces.

La décomposition sur une base d'ondes planes, indépendante de la géométrie de l'objet, est nécessairement moins efficace que celle obtenue via les “modes de

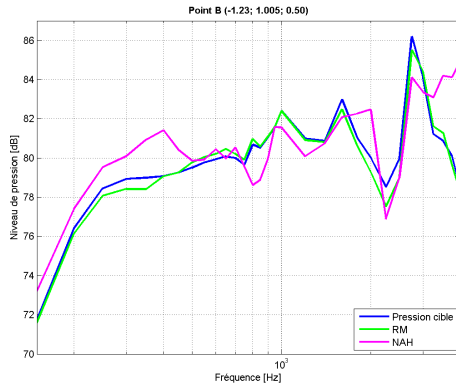


FIGURE 4 – Calcul et reconstruction de la pression au point *B*

rayonnement”, qui sont spécifiques à cette géométrie. La très forte réduction du nombre de mesures nécessaire (46 au lieu de 4096) peut ainsi donner l’impression d’une supériorité intrinsèque de la méthode des “modes de rayonnement”, mais cet avantage doit être tempéré en examinant l’écart important entre la pression cible et la pression calculée par cette méthode lorsque la géométrie de la membrane du HP n’est pas respectée (courbe rouge). Ce gain en nombre de mesure est donc fortement dépendant de la qualité du maillage de l’objet vibrant.

Il est intéressant de vérifier également l’évolution de l’erreur en fonction de la distance entre la source et les points d’observations. La pression est alors reconstruite à deux fréquences (600 Hz et 2 kHz), pour une ligne de points partant du point *A* en augmentant la coordonnée *z* de 0.08 m à 1.5 m (figure 2). Ces simulations sont présentées sur les figures 5 (à 600 Hz) et 6 (à 2 kHz).

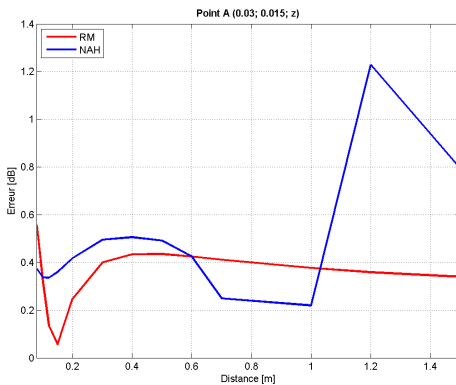


FIGURE 5 – Erreur relative (dB) à 600 Hz en fonction de la coordonnée *z* du point de reconstruction

Lorsque la source et le point d’observation sont proches, le résultat via NAH est plutôt plus précis que celui obtenu par les “modes de rayonnement” qui ignorent les composantes évanescentes, alors qu’en s’éloignant de la source la situation s’inverse du fait que l’hypothèse de champ lointain est de plus en plus valide.

Dans ces exemples, le nombre de points utilisés pour identifier la décomposition par “modes de rayonnement” a été fixé à 46, placés uniformément autour de la source - ce qui n’est pas toujours possible. Il est donc intéressant de

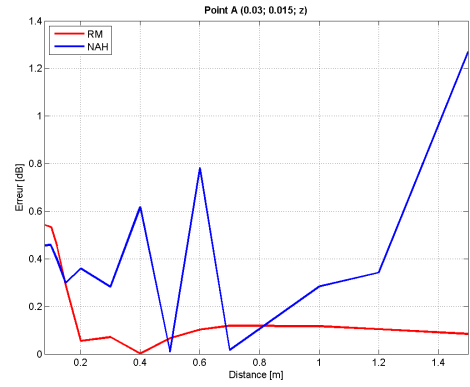


FIGURE 6 – Erreur relative (dB) à 2 kHz en fonction de la coordonnée *z* du point de reconstruction

voir si le nombre et la répartition des mesures peuvent être modifiés - dans des proportions raisonnables : l’inversion nécessite de toute façon un nombre de mesures supérieur au nombre de modes nécessaires pour la précision ciblée, afin d’identifier correctement les coefficients des “modes”. Il faut donc chercher un compromis entre le nombre de mesures d’identification et l’erreur introduite lors de la pseudo-inversion.

La figure 7 représente l’erreur supplémentaire (exprimée en dB) entre le calcul avec 46 points de mesure et un calcul effectué en supprimant certaines positions. Sept options sont testées : 1) suppression de 10 points tous situés à l’arrière de l’enceinte (courbe bleue) ; 2) suppression de 10 points tous situés à l’avant de l’enceinte (courbe rouge) ; 3) suppression de 10 points tous situés sur deux côtés de l’enceinte (courbe verte) ; 4) suppression de 10 points situés tout autour de l’enceinte (courbe rose) ; 5) suppression de 20 points situés tout autour de l’enceinte (courbe rose pointillée) ; 6) suppression de 25 points situés tout autour de l’enceinte (courbe jaune pointillée) ; 7) suppression de 30 points situés tout autour de l’enceinte (courbe bleu turquoise pointillée). Le calcul est réalisé pour le point *B*.

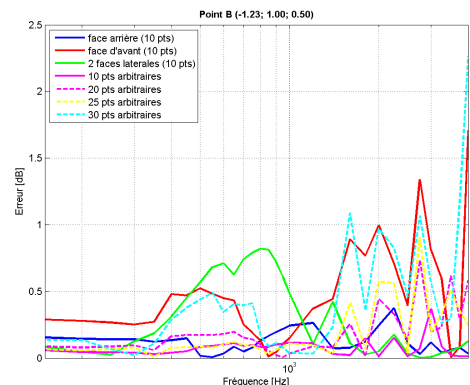


FIGURE 7 – Influence de la réduction du nombre de points d’identification

Cette figure montre que l’erreur n’augmente que faiblement en passant à 21 points de mesure (courbe jaune pointillée sur la figure 7) lorsqu’ils restent répartis tout autour de la source. Des répartitions de mesure moins régulières conduisent à un écart plus important, mais qui reste de l’ordre du dB dans l’exemple présenté. Selon la position

où le champ est reconstruit, certains points de mesures ont probablement moins de poids pour l'identification. Néanmoins le choix des positions doit rester cohérent avec le développement à identifier, et demande donc une certaine expérience pour réduire significativement leur nombre.

5 Mesures

Après l'analyse de simulations, nous présentons ici la confrontation de la méthode des "modes de rayonnement" à des mesures effectuées en chambre sourde. Les coefficients des "modes" sont définis à partir de l'ensemble des points rouges représentés sur la figure 2. Cet ensemble est composé des 31 points arbitrairement répartis autour de l'enceinte, par contre aucune mesure n'a été effectuée à l'arrière, pour des raisons pratiques. La distance entre les points et la boîte est de $7 \text{ cm} \pm 2 \text{ cm}$. Comme dans la section précédente, deux points sont choisis pour visualiser les résultats : $C(0; 0; 0.70)$ (en face du HP) et $D(0; -0.50; 70)$ (décalé de 50 cm par rapport à la normale).

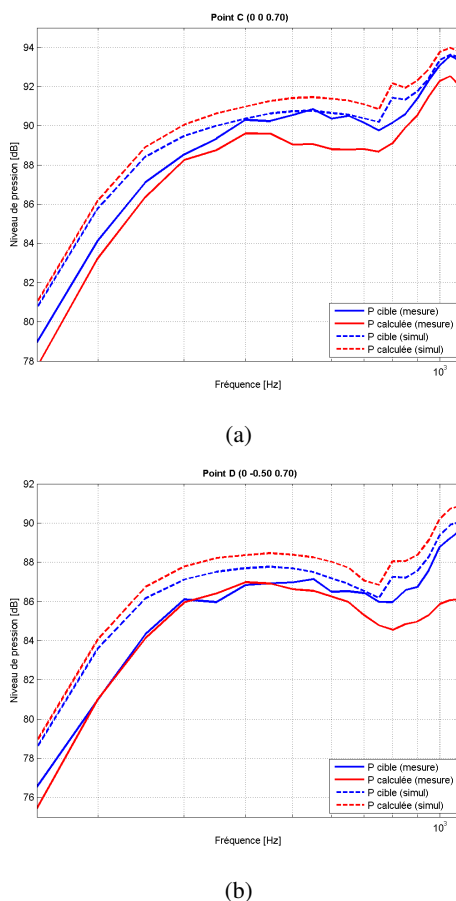


FIGURE 8 – Reconstruction de pression à partir des mesures aux point C (a) et D (b)

La figure 8 présente les résultats de mesure et de reconstruction. Contrairement aux résultats présentés dans la section 4, on constate un écart significatif entre les pressions reconstruites par identification (courbe rouge) et la pression effectivement mesurée (courbe bleue) : de l'ordre de 2 dB au point C , et atteignant 4 dB à 2 kHz au point D .

Le fait de n'avoir aucun point de mesure à l'arrière de l'enceinte joue certainement un rôle, mais les simulations ne permettent pas d'expliquer que cela conduise aux écarts

constatés. Parmi les raisons pouvant expliquer ces résultats, la plus probable est que les positions de mesures ne sont pas connues assez précisément. Tout comme la géométrie du maillage, celle des points d'identification est certainement critique.

Pour étayer cette hypothèse, nous avons ajouté sur la figure 8 une seconde reconstruction effectuée à partir de pressions simulées aux mêmes points en utilisant une vitesse approximative de la membrane du HP. La simulation du champ "cible" (courbe bleue en pointillés) n'est donc pas identique à la mesure, mais la courbe reconstruite (courbe rouge en pointillés) est très proche de cette simulation - bien que les mesures d'identification manquent alors toujours à l'arrière. D'autres simulations sont envisagées pour quantifier l'importance de la précision géométrique requise lors de l'identification.

6 Conclusion

Le travail présenté dans cet article vise à évaluer une méthode de reconstruction de la pression rayonnée par une source de géométrie arbitraire en champ lointain, à partir des mesures à proximité. Cette technique a aussi été confrontée à une méthode très répandue (NAH), ainsi qu'à des mesures.

La méthode des "modes de rayonnement" permet de filtrer totalement le champ évanescents lors de l'identification, tout en introduisant dans la série utilisée pour la reconstruction une information spécifique à la géométrie de la source. Ces deux aspects contribuent à réduire considérablement le nombre de mesures de pression nécessaire à une précision donnée, moyennant l'utilisation d'un code BEM pour construire les termes de la série.

La simulation de la reconstruction du son rayonné par un HP dans une enceinte close par la méthode des "modes de rayonnement" a été comparée aux résultats d'une méthode NAH simple. La NAH est très utilisée pour la localisation de sources, mais nécessite un hologramme de grande taille afin de pouvoir reconstruire très précisément le champ lointain, et un petit espacement entre microphones pour atteindre des fréquences élevées. Cette technique peut donc être dissuasive dans les conditions industrielles. Contrairement à la NAH, la méthode des "modes de rayonnement" permet de reconstruire le champ sonore à partir d'un nombre des mesures bien plus réduit, et la précision de cette technique s'améliore avec la distance entre la source et les positions où reconstruire le champ.

Pour des applications *in situ*, la méthode des "modes de rayonnement" semble donc séduisante. Le nombre de points d'identification peut probablement être encore réduit par rapport à l'exemple présenté, mais le choix des positions peut alors devenir critique. De plus cette technique suppose de bien représenter la diffraction sur la source et les obstacles proches de la zone de mesure, avec une finesse qui semble critique aux hautes fréquences. Ces limitations devront donc être étudiées dans la suite du travail.

Remerciements

Les auteurs aimeraient remercier Cédric Pinhède, Sergio Bellizzi et Marc Pachebat pour leur aide lors de l'installation du montage en salle anéchoïque.

Références

- [1] S. F. Wu. Methods for reconstructing acoustic quantities based on acoustic pressure measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(5) :2680–2697, 2008.
- [2] E. G. Williams. *Fourier acoustics : sound radiation and nearfield acoustical holography*. Academic Press, 1999.
- [3] B.K. Gardner and R.J. Bernhard. A noise source identification technique using an inverse helmholtz integral equation method. *ASME J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Design*, 110(2) :84–90, 1988.
- [4] W.A. Veronesi and J.D. Maynard. Digital holographic reconstruction of sources with arbitrary shaped surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2) :588–598, 1989.
- [5] M. R. Bai. Application of BEM (Boundary Element Method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(1) :533–549, 1992.
- [6] B.-K. Kim and J.-G. Ih. On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(5) :3003–3016, 1996.
- [7] S. F. Wu. *The Helmholtz Equation Least Squares method*. Springer, 2012.
- [8] G. V. Borgiotti and E.M. Rosen. The determination of the far field of an acoustic radiator from sparse measurement samples in the near field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2) :807–818, 1992.
- [9] Ph. Herzog and O. Schevin. Estimation du degré de complexité d'un modèle de source vibrante. In *Actes du 6ème Congrès Français d'Acoustique*, number 075, Lille, FR, 2002.
- [10] Ph. Herzog, R. Guillermin, P. Lorin, and V. Chritin. Identification of a vibration pattern from pressure measurements and radiation modes. In *EuroNoise*, Maastricht (NL), 2015.